Estructuras de Datos
Clase 2 – Análisis de algoritmos

Dr. Sergio A. Gómez
http://cs.uns.edu.ar/~sag

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, Argentina

Motivaciones

- Estamos interesados en construir *buenas* estructuras de datos y *buenos* algoritmos.
- Estructura de datos = Manera sistemática de organizar y acceder datos.
- Algoritmo = Procedimiento paso a paso para realizar una tarea en una cantidad finita de tiempo.
- ¿Cómo analizar algoritmos y estructuras de datos para decidir si son buenos o no?

Motivaciones

- La herramienta de análisis que usaremos consiste de caracterizar el “tiempo de ejecución” de algoritmos y operaciones de estructuras de datos (con uso de espacio de memoria también de interés).
- Objetivo: Una aplicación debe correr lo más rápidamente posible.

Factores que afectan el tiempo de ejecución

- Aumenta con el tamaño de la entrada de un algoritmo
- Puede variar para distintas entradas del mismo tamaño
- Depende del hardware (velocidad del reloj, procesador, cantidad de memoria, tamaño del disco, ancho de banda de la conexión a la red)
- Depende del sistema operativo
- Depende de la calidad del código generado por el compilador
- Depende de si el código es compilado o interpretado

Cómo medir el tiempo de ejecución: (1) Estudio experimental

- Con un algoritmo implementado, hacer varias corridas sobre distintas entradas y realizar un gráfico de dispersión (n, t) con n=tamaño de la entrada natural y t=tiempo de corrida en milisegundos.
- Problemas:
  - Se puede hacer con un número limitado de datos
  - Dos algoritmos son incomparables a menos que hayan sido testeados en los mismos ambientes de hardware y software
  - Hay que implementar el algoritmo para hacer el test

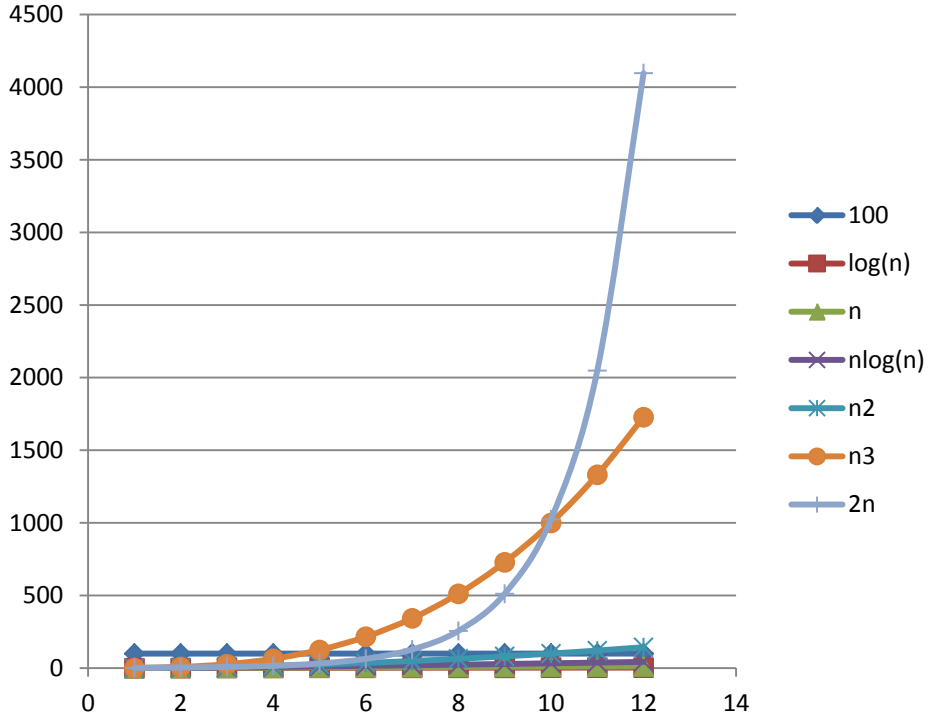
Cómo medir el tiempo de ejecución: (2) Orden del tiempo de ejecución

- Toma en cuenta todas las posibles entradas
- Permite evaluar la eficiencia relativa de dos algoritmos independientemente del ambiente de hardware y software
- Puede realizarse estudiando una versión de alto nivel del algoritmo sin necesidad de implementarlo o hacer experimentos.

Preliminares: Funciones

- Constante: $f(n) = c$
- Logaritmo: $f(n) = \log_b(n)$ para $b>1$
- Lineal: $f(n) = n$
- N-LogN: $f(n) = n \log(n)$
- Cuadrática: $f(n) = n^2$
- Cúbica: $f(n) = n^3$
- Polinomial: $f(n) = n^k$, con k natural
- Exponencial: $f(n) = a^n$ con a real positivo y n
- Factorial: $f(n)=n!$

Funciones comparadas



n	100	log(n)	N	nlog(n)	n^2	n^3	2^n
1	100	0	1	0	1	1	2
2	100	1	2	2	4	8	4
3	100	2	3	5	9	27	8
4	100	2	4	8	16	64	16
5	100	2	5	12	25	125	32
6	100	3	6	16	36	216	64
7	100	3	7	20	49	343	128
8	100	3	8	24	64	512	256
9	100	3	9	29	81	729	512
10	100	3	10	33	100	1000	1024
11	100	3	11	38	121	1331	2048
12	100	4	12	43	144	1728	4096
13	100	4	13	48	169	2197	8192
14	100	4	14	53	196	2744	16384
15	100	4	15	59	225	3375	32768
16	100	4	16	64	256	4096	65536
17	100	4	17	69	289	4913	131072
18	100	4	18	75	324	5832	262144
19	100	4	19	81	361	6859	524288
20	100	4	20	86	400	8000	1048576
21	100	4	21	92	441	9261	2097152
22	100	4	22	98	484	10648	4194304
23	100	5	23	104	529	12167	8388608
24	100	5	24	110	576	13824	16777216

Repaso de Análisis Matemático

- Regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{log(x)}{3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x} = 0$$

Repaso de Análisis Matemático

Nota: Recuerde que dadas dos funciones f(x) y g(x) de los reales en los reales, si existe un número a tal que $f(a) \leq g(a)$ y $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \geq a$, entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$.

Nota: "f(x) = O(g(x))" se lee "f es del orden de g" o "g es una cota asintótica para f" o "f es menor que g asintóticamente" o "g crece más rápidamente que f".
Recuerde que f(x) = O(g(x)) si y sólo si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) / g(x) < +\infty$$

Repaso de Análisis Matemático

Nota: $\lim_{x \to \infty} f(x) / g(x)$ es 0 entonces g(x) crece más rápidamente que f(x).

Ejemplo: El logaritmo crece más lentamente que la función lineal 3*x* porque (usando L'Hôpital):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{log(x)}{3x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x} = 0$$

Repaso de Análisis Matemático

Nota: $\lim_{x \to \infty} f(x) / g(x)$ es una constante mayor que 0 entonces f(x) y g(x) tienen la mismo orden (o tasa de crecimiento).

Ejemplo: $3x^2$ y $40x^2$ son asintóticamente equivalentes porque:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{40x^2} = \frac{3}{40} = 0{,}075$$

Repaso de Análisis Matemático

Nota: $\lim_{x \to \infty} f(x) / g(x)$ es ∞ entonces f(x) crece más rápidamente que g(x).

Ejemplo: $5x^3$ crece más rápidamente que $40x^2$ porque:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3}{40x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{5x}{40} = \infty$$

Tiempo de un algoritmo

- El tiempo de ejecución de un algoritmo depende de la cantidad de operaciones primitivas realizadas.
- Las operaciones primitivas toman tiempo constante y son:
  - Asignar un valor a una variable
  - Invocar un método
  - Realizar una operación aritmética
  - Comparar dos números
  - Indexar un arreglo
  - Seguir una referencia de objeto
  - Retornar de un método
- Como estos tiempos dependen del compilador y del hardware subyacente, por ello los notaremos con constantes arbitrarias c_1, c_2, c_3, …

Notación asintótica (Big-Oh)

Sean f(n) y g(n) : N → R

f(n) es O(g(n)) ssi existen c real con c>0 y n_0 natural con $n_0 \geq 1$ tales que

$$f(n) \leq cg(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

"f(n) es O(g(n))" se lee "f(n) es big-oh de g(n)" o "f(n) es del orden de g(n)"

También se denota como
f(n) = O(g(n))

Reglas de la suma y el producto

- Regla de la suma: Si $f_1(n)$ es $O(g_1(n))$ y $f_2(n)$ es $O(g_2(n))$ entonces $f_1(n) + f_2(n)$ es $O(\max(g_1(n),g_2(n))$
- Regla del producto: Si $f_1(n)$ es $O(g_1(n))$ y $f_2(n)$ es $O(g_2(n))$ entonces $f_1(n)*f_2(n)$ es $O(g_1(n)*g_2(n))$

Lema

Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$

<u>Demostración:</u>

Si $a \leq b$ entonces $b-a \geq 0$

Si $c \leq d$ entonces $d-c \geq 0$

La suma de dos números mayores o iguales a 0 es mayor o igual a 0, por lo tanto:

$(b-a) + (d-c) \geq 0$

Luego, $a+c \leq b+d$.

- Regla de la suma: Si $f_1(n)$ es $O(g_1(n))$ y $f_2(n)$ es $O(g_2(n))$ entonces $f_1(n) + f_2(n)$ es $O(\max(g_1(n),g_2(n))$
- Demostración:

Si $f_1(n)$ es $O(g_1(n))$ entonces existen c_1 real y n_1 natural tales que $f_1(n) \leq c_1 g_1(n)$ para todo $n \geq n_1$

Si $f_2(n)$ es $O(g_2(n))$ entonces existen c_2 real y n_2 natural tales que $f_2(n) \leq c_2 g_2(n)$ para todo $n \geq n_2$

Sea $n_0=\max(n_1,n_2)$, entonces

$f_1(n) \leq c_1 \max(g_1(n),g_2(n))$ para $n \geq n_0$

$f_2(n) \leq c_2 \max(g_1(n),g_2(n))$ para $n \geq n_0$

Entonces $f_1(n)+f_2(n) \leq (c_1+c_2) \max(g_1(n),g_2(n))$ para todo $n \geq n_0$.

Luego $f_1(n) + f_2(n)$ es $O(\max(g_1(n),g_2(n))$, q.e.d.

- Regla del producto: Si $f_1(n)$ es $O(g_1(n))$ y $f_2(n)$ es $O(g_2(n))$ entonces $f_1(n) * f_2(n)$ es $O(g_1(n)*g_2(n))$
- Demostración:

Si $f_1(n)$ es $O(g_1(n))$ entonces existen c_1 real y n_1 natural tales que $f_1(n) \leq c_1 g_1(n)$ para todo $n \geq n_1$

Si $f_2(n)$ es $O(g_2(n))$ entonces existen c_2 real y n_2 natural tales que $f_2(n) \leq c_2 g_2(n)$ para todo $n \geq n_2$

Sea $n_0=\max(n_1,n_2)$, entonces

$f_1(n) \leq c_1 g_1(n)$ para $n \geq n_0$

$f_2(n) \leq c_2 g_2(n)$ para $n \geq n_0$

Entonces $f_1(n)*f_2(n) \leq (c_1 g_1(n))(c_2 g_2(n)) = (c_1 c_2)(g_1(n) g_2(n))$ para todo $n \geq n_0$.

Luego $f_1(n) * f_2(n)$ es $O(g_1(n)*g_2(n))$, q.e.d.

Propiedades útiles

Para probar por inducción:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \qquad \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

De las series:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Big-Omega y Big-Theta

- Big-Omega: Sean f(n) y g(n) funciones de los naturales en los reales. f(n) es $\Omega(g(n))$ ssi existen c real positivo y n_0 natural tales que $f(n) \geq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$.
- Big-Theta: Sean f(n) y g(n) funciones de los naturales en los reales. f(n) es $\Theta(g(n))$ ssi f(n) es $O(g(n))$ y f(n) es $\Omega(g(n))$.
- Nota: Big-Theta quiere decir $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$. Por lo tanto, tienen un crecimiento asintótico equivalente.

Ejemplo

Ejercicio: Mostrar que $3n^2+2n+5$ es $O(n^2)$

Proc: Hay que hallar c real y n_0 natural tal que $3n^2+2n+5 \leq cn^2$ para $n \geq n_0$.

$3n^2 \leq 3n^2$

$2n \leq 2n^2$

$5 \leq 5n^2$

Luego $3n^2+2n+5 \leq 3n^2 + 2n^2 + 5n^2 = (3+2+5)n^2 = 10n^2$
Por lo tanto: c=10

Para hallar n_0 resolver $10n^2 \geq 3n^2+2n+5$, lo que da

$n \leq -5/7$ y $n>=1$. Luego $n_0=1$.

Ejemplo

Prop: Mostrar que un polinomio en n de grado k es de orden n^k.

Dem: Sea $P(n) = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + ... + c_1 n + c_0$

Como $C_k n^k \leq |C_k| n^k$, $C_{k-1} n^{k-1} \leq |C_{k-1}| n^k$, ..., $C_1 n \leq |C_1| n^k$, $C_o \leq |C_o| n^k$

Será que $P(n) \leq \sum_{i=0..k} |C_i| n^k = (\sum_{i=0..k} |C_i|)\ n^k$

Problema: Para un problema P cuyo tiempo está dado por T(n)=200n expresado en microsegundos, determine el tamaño máximo *n* de P que puede ser resuelto en 1 segundo.

Solución: Si T(n) = 200n entonces T(1) = 200 μseg, T(2) = 400μseg.

¿Cuál será n para T(n) = 1 seg = 10^6 μseg?

T(n) = 200n = 10^6.

Luego n = 10^6 / 200 = 5.000.

Por lo tanto, el tamaño de la entrada para tener el tiempo de corrida de P acotado en un segundo es cinco mil.

Reglas para calcular T(n) a partir del código fuente de un algoritmo

Paso 1: Determinar el tamaño de la entrada n

Paso 2: Aplicar las siguientes reglas en forma sistemática:

- $T_P(n)$ = constante si P es una acción primitiva
- $T_{S1;\ldots;Sk}(n) = T_{S1}(n) + \ldots + T_{Sk}(n)$
- $T_{\text{if B then S1 else S2}}(n) = T_B(n) + \max(T_{S1}(n), T_{S2}(n))$
- $T_{\text{for(m;S)}}(n) = m * T_S(n)$ donde m=cant_iteraciones(for(m;S))
- $T_{\text{while B do S}}(n) = m*(T_B(n) + T_S(n)) + T_B(n)$ donde m=cant_iteraciones(while B do S)
- $T_{\text{call P}}(n) = T_S(n)$ donde procedure P; begin S end
- $T_{f(e)}(n) = T_{x:=e}(n) + T_S(n)$ donde function f(x); begin S end

Ejercicio: Mostrar que la búsqueda lineal en un arreglo de n enteros tiene orden n.

```
public  static int lsearch( int [] a, int n, int x )
{
    int i = 0;
    boolean encontre = false;
    while( i<n && !encontre )
            if( a[i] == x )
                encontre = true;
            else i++;
    if( encontre ) return i;
    else return -1;
}
```

Tamaño de la entrada: n = cantidad de componentes de a

Peor caso: x no está en a

```
public  static int lsearch( int [] a, int n, int x )
{
    int i = 0;                          c1
   boolean encontre = false;            c2
   while( i<n && !encontre )            Peor caso: n iteraciones
          if( a[i] == x )               Tiempo de condición: c3
              encontre = true;          Tiempo del cuerpo: c4
         else i++;
   if( encontre ) return i;             Tiempo de este if: c5
   else return -1;
}
```

$T(n) = c_1 + c_2 + (n(c_3+c_4) + c_3) + c_5 = O(n)$

El tiempo es *lineal* en el tamaño de la entrada.

Ejercicio: Mostrar que la búsqueda binaria (dicotómica) en un arreglo de n componentes ordenadas en forma ascendente tiene orden logarítmico de base 2 en la cantidad de elementos del arreglo.

```
public static int bsearch( int [] a, int n, int x ) {
    int ini = 0, fin = n-1;
    while( ini <= fin ) {
        int medio = (ini + fin) / 2;
        if( a[medio] == x ) return medio;
        else if( a[medio] > x ) fin = medio-1;
        else ini = medio + 1;
    }
    return -1;
}
```

Tamaño de la entrada: n = cantidad de componentes de a

Peor caso: x no está en a

```
public static int bsearch( int [] a, int n, int x ) {
    int ini = 0, fin = n-1;                          c1
    while( ini <= fin ) {                            Tiempo de la condición: c2
        int medio = (ini + fin) / 2;                 Tiempo del cuerpo: c3
        if( a[medio] == x ) return medio;
        else if( a[medio] > x ) fin = medio-1;
        else ini = medio + 1;
    }
    return -1;                                       c4
}
```

Sea k = cantidad de iteraciones del while, entonces

$T(n) = c_1 + k(c_2+c_3) + c_2 + c_4$.

La pregunta es cómo definir k en función de n.

¿Cómo estimar k en función de n?

El peor caso es cuando “x” no está en “a”.

Veamos cómo vamos descartando componentes del arreglo en función del número de iteración del while: Si tenemos n componentes, en cada iteración se descarta la componente del medio del arreglo, entonces de las n-1 componentes que falta revisar sólo se va considerar la mitad, entonces quedan (n-1)/2 componentes para la siguiente iteración, y así sucesivamente.

Calculemos cuál es caso para la iteración genérica k.

Número de iteración	Componentes por revisar
1	n
2	(n-1)/2
3	(n-3)/4
4	(n-7)/8
5	(n-15)/16
…	…
k	$\frac{n-(2^{k-1}-1)}{2^{k-1}}$

Entonces vimos que en la iteración k, la cantidad de componentes que quedan por revisar es:

$$\frac{n-(2^{k-1}-1)}{2^{k-1}}$$

Como x no está en el arreglo a, en la última iteración completa que realiza el while queda una componente del arreglo por revisar.
Entonces:

$$\frac{n-(2^{k-1}-1)}{2^{k-1}}=1; \qquad n-(2^{k-1}-1)=2^{k-1};$$

$$n-2^{k-1}+1=2^{k-1}; \qquad n+1=2^{k-1}+2^{k-1};$$

$$n+1=2\times 2^{k-1}; \qquad n+1=2^{k}; \qquad \log_2(n+1)=k.$$

Con lo que T(n) = $c_1 + \log_2(n+1)(c_2+c_3) + c_2 + c_4$.
Luego, por regla de la suma, T(n) = $O(\log_2(n))$ q.e.d.

Ejercicio: Mostrar que el método de ordenamiento de arreglos de *selección* tiene orden cuadrático en la cantidad de elementos del arreglo.

```
public static void selection_sort( int []a, int n ) {
    for( int i=0; i<n-1; i++ ) {  // Repetir n-1 veces
        int k = i; // Hallar k tq a_k es el mínimo de
        for( int j=i+1; j<n; j++ ) // a_i, a_{i+1},..., a_{n-1}
                if( a[j] < a[k] )
                        k = j;
        swap( a, i, k ); // Intercambiar a_i con a_k
    }
}
```

Tamaño de la entrada: n = cantidad de componentes de a.

```
public static void selection_sort( int []a, int n ) {
    for( int i=0; i<n-1; i++ ) {  // n-1 iteraciones (desiguales)
        int k = i; // c1
        for( int j=i+1; j<n; j++ ) // (n-1)-(i+1)+1) iteraciones
                if( a[j] < a[k] ) // Tiempo del if: c2
                    k = j;
        swap( a, i, k ); // Tiempo de swap: c3
    }
}
```

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (c_1 + ((n-1) - (i+1) + 1)c_2 + c_3)$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (c_1 + ((n-1) - (i+1) + 1)c_2 + c_3) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} c_1 + c_2 \sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1) + \sum_{i=0}^{n-2} c_3$$

$$= c_1(n - 2 - 0 + 1) + c_2 \sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1) + c_3(n - 2 - 0 + 1)$$

$$= c_1(n-1) + c_2 \sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1) + c_3(n-1)$$

Falta ver cuánto vale el término del medio.

$$\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) =$$

$$=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+(n-(n-2)-1) =$$

$$=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1 =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Entonces, sabíamos que:

$$T(n) = c_1(n-1) + c_2 \sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) + c_3(n-1) =$$

$$= c_1\,(n-1) + c_2\,\frac{n(n-1)}{2} + c_3(n-1) = O(n^2)$$

Bibliografía

- Goodrich & Tamassia. Data Structures and Algorithms. Fourth Edition. Capítulo 4.